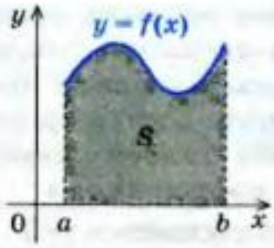
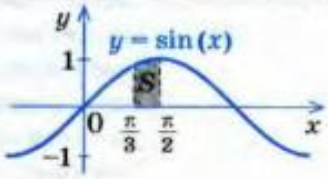
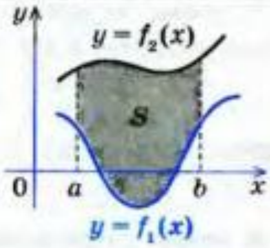
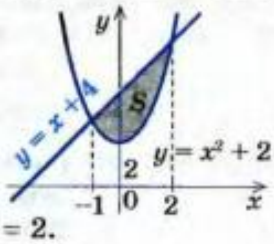
Вычисление площадей и объемов с помощью определенного интеграла	
Площадь криволинейной трапеции	
Формула	**Пример**
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной на отрезке $[a;\ b]$ графиком непрерывной положительной функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, равна $\boxed{S=\int\limits_a^b f(x)dx}$ 	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$; $y=0$; $x=\frac{\pi}{3}$; $x=\frac{\pi}{2}$ Изображая эти линии, получаем криволинейную трапецию  $S=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big\vert_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и прямыми $x=a$ и $x=b$	
Формула	**Пример**
 Если на данном отрезке $[a;\ b]$ непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ обладают таким свойством, что $f_2(x)\geqslant f_1(x)$ для всех $x\in[a;\ b]$, то $\boxed{S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx}$ **(1)**	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2$, $y=x+4$ Изобразим данные линии и абсциссы их точек пересечения.  Абсциссы точек пересечения: $x^2+2=x+4$ $x^2-x-2=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$. Тогда по формуле (1) $S=\int\limits_{-1}^{2}((x+4)-(x^2+2))dx=$ $=\int\limits_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_{-1}^{2}=4\frac{1}{2}$

Площадь плоской фигуры.

Площадь *S* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a<x<b$, вычисляется по одной из следующих формул:

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad \textbf{(1*)}$$

если $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a,b]$;

$$S=-\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad \textbf{(2)}$$

если $f(x)\le 0$ на отрезке $[a,b]$;

$$S=\int_a^b |f(x)|dx, \qquad \textbf{(2*)}$$

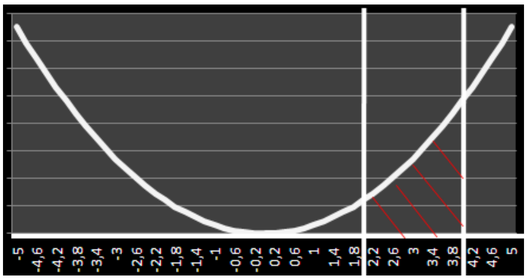
если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a,b]$.

Площадь S фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x)\ge f_2(x)$ на отрезке $[a,b]$, вычисляем по формуле

$$S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx. \qquad \textbf{(3)}$$

🕮Решение типовых заданий.

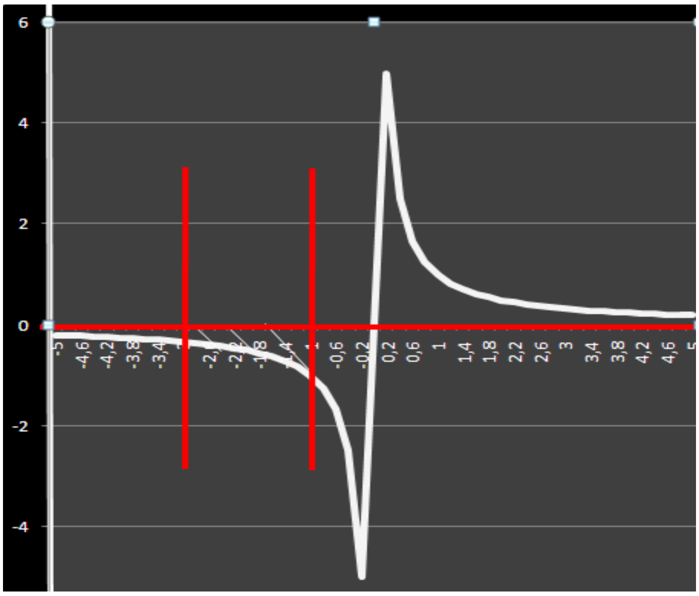
Пример 1.Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=3x^2$, прямыми $x=2$, $x=4$ и осью абсцисс.



Решение. Воспользовавшись формулой (1), имеем:

$$S=\int_2^4 3x^2dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = 64-8=56.$$

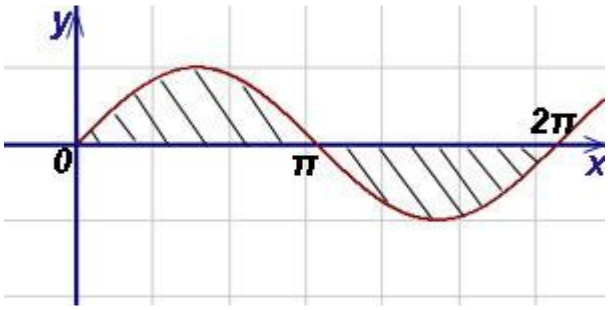
Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $y=\frac{1}{x}$, прямыми $x=-3$, $x=-1$ и осью абсцисс.



Решение. На отрезке [-3,-1] функция $f(x)=\frac{1}{x}$ отрицательна. Поэтому для вычисления площади рассматриваемой фигуры воспользуемся формулой (2).

$$S=-\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x}dx = -\ln|x|\Big|_{-3}^{-1} = -(\ln 1-\ln 3) = \ln 3 (\text{кв.ед})$$

Пример 3. Найти площадь, заключённую между осью абсцисс (Ox) и двумя соседними волнами синусоиды.



Решение. Площадь данной фигуры можем найти по **формуле (2):**

$$s=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx$$

Найдём отдельно каждое слагаемое:

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=$$

$$=1+1=2.$$

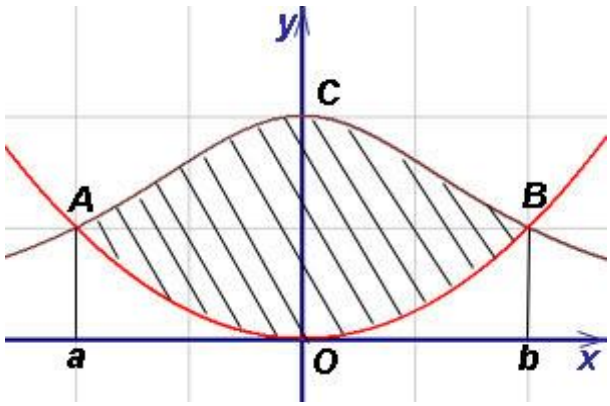
$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos\pi)=$$

$$=-1-1=-2.$$

Окончательно находим площадь:

$s=2-(-2)=4$.кв.ед

Пример 4. Найти площадь фигуры, заключённой между параболой $x^2=4y$ и кривой $y(x^2+4)=8$.



Решение. Выразим уравнения линий через игрек:

$$y=\frac{x^2}{4};$$

$$y=\frac{8}{x^2+4}.$$

Площадь по **формуле (2)** получим как

$$s=\int_a^b\frac{8dx}{x^2+4}-\int_a^b\frac{x^2dx}{4},$$

где a и b - абсциссы точек A и B. Найдём их, решая совместно уравнения:

$$\begin{cases}y=\dfrac{8}{x^2+4}\\ y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$$

Отсюда

$$x^2=\frac{32}{x^2+4};\quad x^4+4x^2=32;$$

$$a=-2;\quad b=2.$$

Окончательно находим площадь:

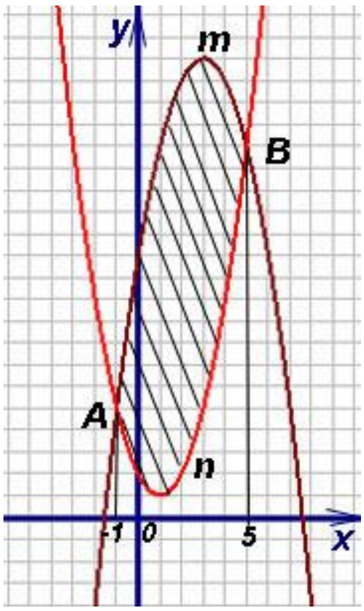
$$s=\int_{-2}^{2}\frac{8dx}{x^2+4}-\int_{-2}^{2}\frac{x^2dx}{4}=$$

$$=4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{12}\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=4\operatorname{arctg}1-4\operatorname{arctg}(-1)-\frac{16}{12}=$$

$$=4\frac{\pi}{4}+4\frac{\pi}{4}-\frac{4}{3}=2\pi-\frac{4}{3}\text{ кв.ед.}$$

И, наконец, случаи, когда площадь фигуры может быть вычислена по формуле **(3).**



Пример 5. Найти площадь фигуры, заключённой между параболами $y=12+6x-x^2$ и $y=x^2-2x+2$.

Решение. Требуется вычислить площадь фигуры $AmBn$, у которой боковые отрезки выродились в точки A и B пересечения парабол. Решая совместно (как систему) уравнения парабол, находим их абсциссы: $x_1=-1$ и $x_2=5$.

На отрезке [-1, 5] получаем $12+6x-x^2\geq x^2-2x+2$.

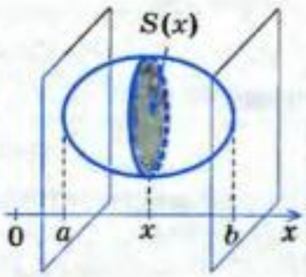
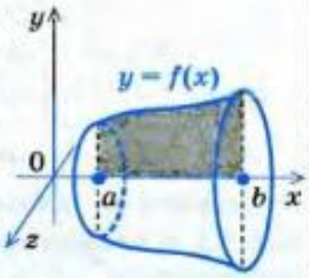
Следовательно, по **формуле (3)** находим площадь фигуры:

$$s=\int_{-1}^{5}\left[\left(12+6x-x^2\right)-\left(x^2-2x+2\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{5}\left(10+8x-2x^2\right)dx=\left(10x+4x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{5}=$$

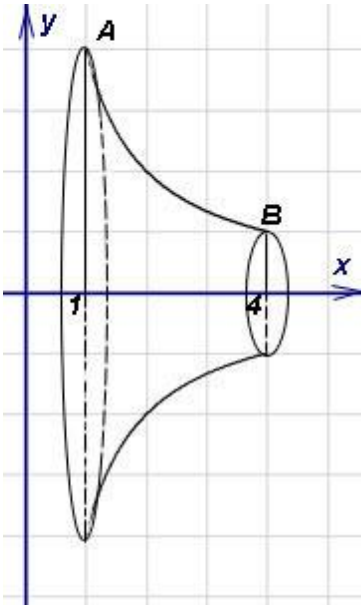
$$=\left(50+100-\frac{250}{3}\right)-\left(-10+4+\frac{2}{3}\right)=$$

$$=72\text{ кв.ед.}$$

Объемы тел	
В общем случае	**Для тела вращения**
Если тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, которые проходят через точки $x = a$ и $x = b$, то  $V = \int_a^b S(x)dx,$ где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, проходящей через точку $x \in [a;\ b]$ и перпендикулярной к оси Ox	Если тело получено в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной на отрезке $[a;\ b]$ графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то  $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

Решение типовых задач

Пример 1. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс (Ox) фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = 4$.

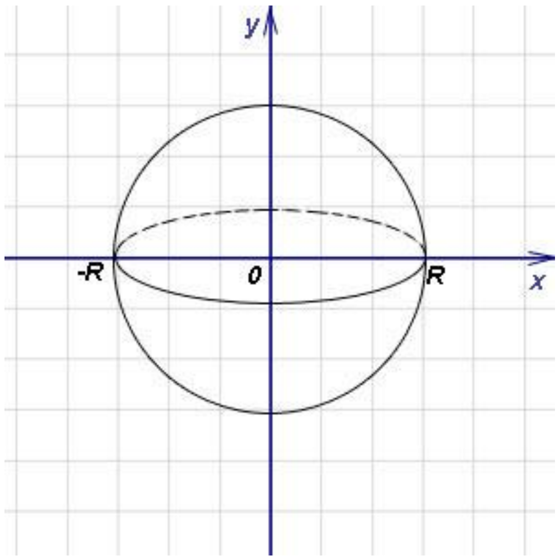


Решение. Объём тела вращения найдём по формуле (1), в которой $f(x) = \frac{4}{x}$, а пределы интегрирования $a = 1$, $b = 4$:

$$v = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = 16\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= 12\pi \text{ куб.ед.}$$

Пример 2. Найти объём шара радиуса R.



Решение. Рассмотрим шар как тело, получащееся при вращении вокруг оси абсцисс полукруга радиуса R с центром в начале координат. Тогда в формуле (1) подынтегральная функция запишется в виде $y^2 = R^2 - x^2$, а пределами интегрирования служат $-R$ и R. Следовательно,

$$v = \pi\int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3.$$