Лекция «Основные понятия дискретной математики»

Цель: формарование представления о дискретной математике, ее основных понятиях

План

1. Множества
2. Логика. Таблицы истинности
3. Комбинаторика

ВСР:

- ***ВСР «Логика»***
- **РГЗ «**Решение комбинаторных уравнений»

Дискретная математика остается наиболее динамичной областью знаний. Сегодня наиболее значимой областью применения дискретной математики является область компьютерных технологий. Модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках. Язык дискретной математики стал фактически метаязыком всей современной математики. Дискретная математика представляет собой область математики, в которой изучаются свойства структур конечного характера, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих их элементов. К классической же математике относится все, что явно или неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества и отношения

Множества и элементы множеств

Определение. *Множество* – любая определенная совокупность объектов произвольной природы. Обозначают множества прописными латинскими буквами: *A*, *B*, ¼ , а его элементы обозначаются строчными латинскими буквами: *a*, *b*, ¼.

Например:

$x \in A$ ($\mathbf{x}$ является *элементом* множества $\mathbf{A}$ (" $\mathbf{x}$ принадлежит *A*")),

$x \notin A$ ($\mathbf{x}$ не является элементом множества *A*).

Определение. *Пустое множество* – это множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается оно символом: Æ.

Определение. $\mathbf{U}$ – *универсальное множество* (*универсум*) – множество, из которого берутся элементы в конкретном рассуждении. $\mathbf{U}$ – множество, рассматриваемое как наиболее общее в данной ситуации.

Множество элементов x, удовлетворяющих свойству *P*(*x*) обозначается $\{x | P(x)\}$

Примеры.

$N = \{1,2,3,\ldots n,\ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$R = \{-\infty;+\infty\}$ – множество вещественных чисел.

$C = \{a + ib \mid a \in R, b \in R\}$ – множество комплексных чисел.

1.2. Сравнение множеств

Определение. $A \subseteq B$ (*A* содержится в *B* или *B* включает *A*), если $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$. *A* называется подмножеством *B*. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то *A* называется строгим (собственным) подмножеством *B*. Обозначается это $A \subset B$.

Определение. $A = B$ если они являются подмножествами друг друга, то есть $(a, b) \in R$; или $A = B \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Определение. Мощность конечного множества $|A|$ – число его элементов. Мощность бесконечного множества равна ¥.

1.3. Операции над множествами

Определение. Объединением множеств *A* и *B* ($A \cup B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из них. $A \cup B = \{x \mid x \in A\ или\ x \in B\ или\ x \in A\ и\ B\ одновременно\}$

Определение. Пересечением множеств *A* и *B* ($A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и первому и второму одновременно. $A \cap B = \{x \mid x \in A\ и\ x \in B\}$

Определение. Разностью множеств *A* и *B* ($A \setminus B$) называется множество, состоящее из элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*. $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Определение. Симметрической разностью множеств *A* и *B* ($A \Delta B$) называется множество, состоящее из элементов множества *A*, не являющихся элементами множества *B* и элементов множества *B*, не являющихся элементами множества *A*. $A \Delta B = \{x \mid (x \in A\ и\ x \notin B)\ или\ (x \in B\ и\ x \notin A)\}$

Определение. Дополнением множества *A* ($\overline{A}$) называется множество, состоящее из элементов множества *U*, не принадлежащих множеству *A*.

$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$

Пример: $A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{c, d, e, f\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A \cap B = \{c, d, e\}$

$A \setminus B = \{a, b\}$

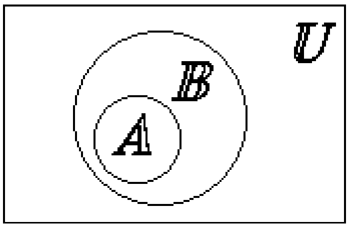
$B \setminus A = \{f\}$

$A \Delta B = \{a, b, f\}$

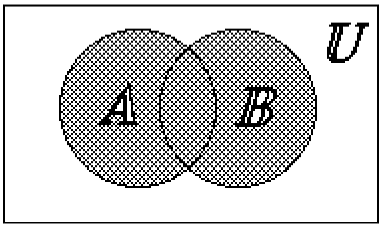
$\overline{A}$ зависит от того, какое *U*. Если $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, то $\overline{A} = \{f\}$, если $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, то $\overline{A} = \{f, g\}$.

1.4. Диаграммы Эйлера-Венна

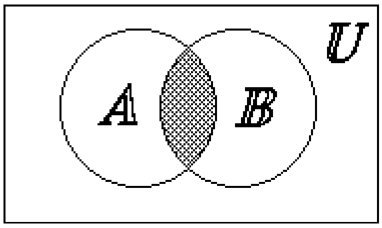
Диаграммы Эйлера-Венна – это геометрическое представление множеств. Множество *U* изображается прямоугольником, рассматриваемые множества – фигурами (окружностями). Для выделения результата применяется штриховка.



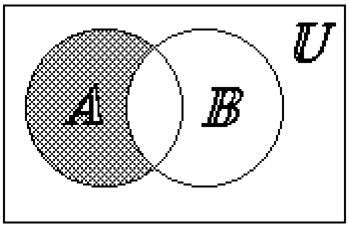
$A \subseteq B$



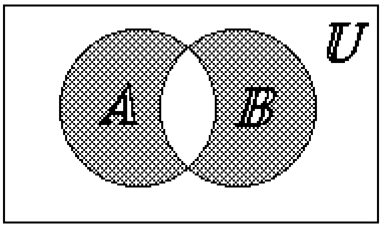
$A \cup B$



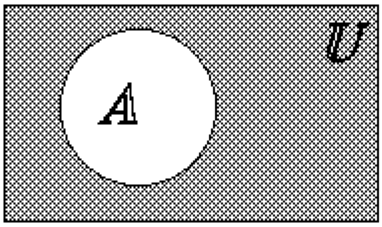
$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \Delta B$



$\overline{\mathbf{A}}$

1.5. Табличный способ задания множеств

Пусть задано множество *U*. Рассмотрим произвольное его подмножество $A \subseteq U$ и элемент $x \in U$.

Определение. Индикаторной (характеристической) функцией для множества *A* называется функция

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & если\ x \in A \\ 0, & если\ x \notin A \end{cases}.$$

Таким образом: $I_A : U \to \{0,1\}$.

Для $A, B \subseteq U$ имеют место свойства:

$A = B \Leftrightarrow I_A(x) \equiv I_B(x)$

$I_A \le I_B \Leftrightarrow A \subseteq B$;

$I_{\overline{A}}(x) = 1 - I_A(x)$

$I_{A \cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x) \cdot I_B(x)$

$I_{A \cap B}(x) = I_A(x) \cdot I_B(x)$

$I_{A \setminus B}(x) = I_A(x) - I_A(x) \cdot I_B(x)$

$I_{A \Delta B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - 2I_A(x) \cdot I_B(x)$

Индикаторы удобно задавать с помощью таблиц:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$x \in A \cap B$	$x \in A \setminus B$	$x \in \overline{A}$	$x \in A \Delta B$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0

1.6. Свойства операций над множествами

Объединение и пересечение:

1. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность
2. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ – дистрибутивность
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность
7. $A \cup A = A$ – идемпотентность
8. $A \cap A = A$ – идемпотентность
9. $A \cup \overline{A} = U$ – свойство дополнения
10. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ – свойство дополнения
11. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ – закон де Моргана
12. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – закон де Моргана
13. $A \cup \varnothing = A$ – свойство нуля
14. $A \cap \varnothing = \varnothing$ – свойство нуля

Дополнение:

15. $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ – инволютивность
16. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$
17. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Разность, симметрическая разность:

18. $A \setminus \varnothing = A$
19. $A \setminus A = \varnothing$
20. $A \Delta B = B \Delta A$
21. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
22. $A \Delta \varnothing = A$
23. $A \Delta A = \varnothing$

1.7. Отношения

Определение. Пусть *A* и *B* произвольные множества. *Декартовым произведением* множеств *A* и *B* называется множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит множеству *A*, а второй – множеству *B*.

$$A \times B = \{(a, b) \setminus a \in A, b \in B\}$$

Пример. $R \times R = R^2$ – точки плоскости.

Свойства декартовых произведений

1. $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$
2. $A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$
3. $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$
4. $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$
5. $(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$
6. $A \times (B_1 \setminus B_2) = (A \times B_1) \setminus (A \times B_2)$

Понятие отношения.

Отношение это один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-либо признака *R* у элемента множества *A*. Например, "быть четным" на множестве натуральных чисел. Все элементы множества *A*, отличающиеся признаком *R*, образуют подмножество множества *A*, называемое отношением *R*.

Бинарные отношения

Бинарные (двуместные) отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов множеств *A* и *B*. Все пары (a,b) элементов множеств *A* и *B*, находящиеся в отношении *R* , образуют подмножество множества $A\times B$.

Определение. *Бинарное отношение* – это тройка множеств $(\mathbf{R}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $R\subseteq A\times B$ – график отношения. Пишут $(a,b)\in R;$ или *aRb*.

Область определения : $\mathrm{Dom}\, R = \delta_R = \{x\in A \mid \exists y\in B\,(x,y)\in R\}$;

Область значений: $\mathrm{Im}\, R = \rho_R = \{y\in B \mid \exists x\in A\,(x,y)\in R\}$;

Обратное отношение: $R^{-1} = \{(y,x)\in B\times A \mid xRy\}$;

Композиция отношений $R\subseteq A\times B$ *и* $S\subseteq B\times C$:

$$R\circ S = \{(x,y)\in A\times C \mid \exists z\in B\,(xRz\ \&\ zRy)\}.$$

Частичным порядком (пишут $x\le y$), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

2 ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ. ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ

2.1 Понятие высказывания

Высказывание – связное повествовательное предложение (утверждение), о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Примеры:

1. “2x2=4”
2. “2<3”
3. 7 – простое число.
4. А.С. Пушкин – великий русский математик.
5. Является ли х=3 корнем уравнения x^2-5x+6=0?
6. Меньше один в является два при.
7. Слава российским студентам!
8. Математика – интересный предмет.
9. Каша – вкусное блюдо.
10. Шёл снег.
11. Площадь комнаты равна 20$м^2$.
12. x<y.

В приведенных примерах 1,2,3 – истинные высказывания, а 4 – ложное высказывание. 5 и 7 не являются высказываниями, так как не являются повествовательными предложениями. А 6 не является высказыванием по причине не связности. 8 и 9 – не высказывания, так как нет и не может быть единого мнения о том, истинны эти предложения или ложны. 10 и 11 – не высказывания, так как необходимы дополнительные сведения: когда и где шел снег, о какой конкретной комнате идет речь. И 12 не высказывание, так как нельзя сказать истинно оно или ложно, пока мы не знаем чему равны X и Y.

В дальнейшем, если *a* – истинное высказывание, то будем писать символ “1”, если *a* - ложное высказывание, то будем писать символ “0”.

2.2 Основные логические операции

В русском языке (как и в любом другом) из простых связных повествовательных предложений с помощью некоторых стандартных конструкций можно образовывать новые (составные) повествовательные предложения. В алгебре высказываний этим конструкциям соответствуют логические операции.

Отрицание

Отрицание высказывания *a* – высказывание, истинное, когда высказывание *a* ложно и ложное – в противном случае.

Обозначение: $\overline{a}$, $\neg a$ (читается: “не *a*”, “неверно, что *a*”)

Отрицание определяется следующей таблицей

a	$\overline{a}$
0	**1**
1	**0**

Пример:

a – “Идет дождь”

$\overline{a}$ – “Дождя нет”

Конъюнкция

Конъюнкцией двух высказываний *a* и *b* называется высказывание, истинное, когда оба высказывания истинны, и ложное – во всех других случаях.

Обозначение: *a&b; a^b;a*b* (читается: “*a* и *b*”). Конъюнкция определяется следующей таблицей:

a	***b***	***a^b***
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример

a – “Небо покрыто тучами”

b – “Идет дождь”

a & b – “Небо покрыто тучами и идет дождь”

Дизъюнкция

Дизъюнкцией двух высказываний *a* и *b* называется высказывание, ложное в случае, когда оба высказывания ложны и истинное – во всех других случаях

Обозначение: $a \vee b$ (читается *a* или *b*).

Дизъюнкция определяется таблицей:

a	***b***	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример: *a* – “Идет дождь”

b – “Идет снег”

$a \vee b$ – “Идет дождь или снег”

Импликация

<u>Импликацией</u> двух высказываний *a* и *b* называется высказывание, ложное, когда *a* истинно, а *b* ложно; во всех других случаях – истинные.

Обозначение: $a \to b$ (читается: “если *a* то *b*”, “из *a* следует *b*”)

Импликация определяется таблицей:

a	*b*	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример:

a – “Идет дождь”

b – “Крыши мокрые”

$a \to b$ – “Если идет дождь, то крыши мокрые”

Эквиваленция

<u>Эквиваленцией</u> двух высказываний *a* и *b* называется высказывание, истинное, когда *a* и *b* имеют одинаковые значения истинности и ложное – в противном случае.

Обозначение: $a \sim b$ (читается: “*a* эквивалентно *b*”, “*a* тогда и только тогда, когда *b*”).

Эквиваленция определяется таблицей:

a	*b*	$a \sim b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример:

a – “Идет дождь”

b – “Крыши мокрые”

$a \sim b$ – “Идет дождь тогда и только тогда, когда крыши мокрые”

2.3 Формулы логики

<u>Формулой логики</u> называется выражение, составленное из обозначений высказываний, знаков логических операций и скобок, определяющих порядок действий, если оно удовлетворяет след. условиям:

1) Любая переменная, обозначающая высказывание – формула;
2) Если А и В – формулы, то $\overline{A}$, (А & В), (А ∨ В), (А → В), (А ~ В) – формулы.
3) Других формул нет.

Порядок действий: ¬, &, ∨, →, ~.

Пример:

1) $((a \to \overline{b}) \vee a) \sim b * \overline{c}$;
2) $((a \vee 0) * \overline{c} \vee a) \to \overline{b}$;
3) $(a \to) \sim (c \vee \overline{b})$;
4) $(\to x \vee \overline{y})\sim$

1, 2 – формулы, 3, 4 не являются формулами.

2.4 Методика построения таблицы истинности.

Таблица истинности формулы логики содержит столько строк, сколько всевозможных наборов значений истинности переменных можно образовать. Так как каждая переменная может принимать только два значения (0 или 1), то в случае n переменных таблица истинности содержит 2^n строк.

При построении таблицы истинности наборы значений переменных располагают сверху вниз в порядке возрастания от (00…0) до (11…1). При этом можно применить метод ”последовательного половинного деления столбцов” – столбец первой переменной делят пополам и заполняют верхнюю половину нулями, а нижнюю половину – единицами, затем каждую половину второго столбца делят пополам и опять заполняют полученные половины нулями и единицами и т.д. Последовательность такого заполнения приведена ниже.

X_1	X_2	X_3
0		
1		

X_1	X_2	X_3
0	0	
	1	
1	0	
	1	

X_1	X_2	X_3
0	0	0
		1
	1	0
		1
1	0	0
		1
	1	0
		1

Затем в соответствии с порядком действий последовательно заполняют столбцы значений подформул, из которых образуется формула. Последним заполняется столбец значений истинности формулы

Пример. Построить таблицу истинности формулы:

$x\,\bar{y} \to (x \vee y)\,\bar{z}$

1. Определим порядок действий в формуле:

$$x\overset{2}{\wedge}\overset{1}{\bar{y}}\overset{6}{\to}\left(x\overset{3}{\vee}y\right)\overset{5}{\wedge}\overset{4}{\bar{z}}$$ x

2. Пользуясь определениями операций ¬, &, ∨ и → заполним таблицу.

x	**y**	**z**	$\bar{y}$	$x\bar{y}$	**x∨y**	$\bar{z}$	**(x∨y)** $\bar{z}$	**x** $\bar{y}$ **→(x∨y)** $\bar{z}$
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Тождественно-истинные формулы

Тождественно-истинной формулой называется формула, которая при любых значениях истинности своих простых высказываний принимает значение “истина”.

ВСР «Логика»
Задачи для самостоятельного решения

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:
а)Москва - столица России;
б) студент физико-математического факультета;
в) 5+3 – 6;
г) Луна есть спутник Марса;
д) a>0.

2. Приведите примеры предложений, а) являющихся высказываниями; б) не являющихся высказываниями.

3. Среди следующих высказываний указать элементарные (простые) и составные (сложные). В составных высказываниях выделить грамматические связки:
1) число 27 не делится на 3;
2) число 15 делится на 5 и на 3;
3) если число 126 делится на 9, то оно делится на 3;
4) число 7 является делителем числа 42;
5) число 1269 делится на 9 тогда и только тг когда 18 делится на 9.

4. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики:
1) 45 кратно 3 и 42 кратно 3;
2) 45 кратно 3 и 12 не кратно 3;
3) 2<5;
4) если число 212 делится на 3 и 4, то оно делится 12;
5) число 212 - трехзначное и кратно 3 или 4.

5. Какие из следующих импликаций истинны:
1) если 2x2=4, то 2<3;
2) если 2x2=4, то 2>3;
3) если 2x2=5, то 2<3;
4) если 2x2=5, то 2>3?

7. Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$? Постройте таблицу истинности

Контрольные вопросы

1. Что называется высказыванием?
2. Определения простого (элементарного) и сложного (составного) высказываний.
3. Логические значения высказываний.
4. Что называется отрицанием простого высказывания? Привести таблицу истинности.
5. Что называется дизъюнкцией двух простых высказываний? Привести таблицу истинности.
6. Что называется конъюнкцией двух простых высказываний? Привести таблицу истинности.
7. Что называется импликацией двух простых высказываний? Привести таблицу истинности.
8. Что называется эквиваленцией двух простых высказываний? Привести таблицу истинности.
9. Определение формулы алгебры логики.
10. В какой последовательности выполняются логические операции?

3. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами.

Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин.

Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

Правила сложения и умножения в комбинаторике.

Правило суммы. Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно n + m способами.

Пример 1.

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

Решение

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек.

По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить 16+10=26 способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.

Пример 2.

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?

Решение

Первым дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Т.к. в классе учится 16 мальчиков и 10 девочек, то назначить первого дежурного можно 16+10=26 способами.

После того, как мы выбрали первого дежурного, второго мы можем выбрать из оставшихся 25 человек, т.е. 25-ю способами.

По теореме умножения двое дежурных могут быть выбраны 26*25=650 способами.

Сочетания без повторений. Сочетания с повторениями.

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать m из n различных предметов?*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 3.

Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

.

Рассмотрим задачу о числе сочетаний с повторениями: имеется по r одинаковых предметов каждого из n различных типов; *сколькими способами можно выбрать m ($m \le r$) из этих (n*r) предметов?*

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 4.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение

Т.к. среди 7 пирожных могут быть пирожные одного сорта, то число способов, которыми можно купить 7 пирожных, определяется числом сочетаний с повторениями из 7 по 4.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Размещения без повторений. Размещения с повторениями.

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом*: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?*

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 5.

В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение.

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?*

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Пример 6.

У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера – составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

Решение

Можно считать, что опыт состоит в 5-кратном выборе с возращением одной из 3 цифр (1, 3, 7). Таким образом, число пятизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 5:

$$\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями.

Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?*

$$P_n = n!$$

Пример 7.

Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова «брак»?

Решение

Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак» (б, р, а, к). Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов (k < n), т. е. есть одинаковые предметы.

$$\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Пример 8.

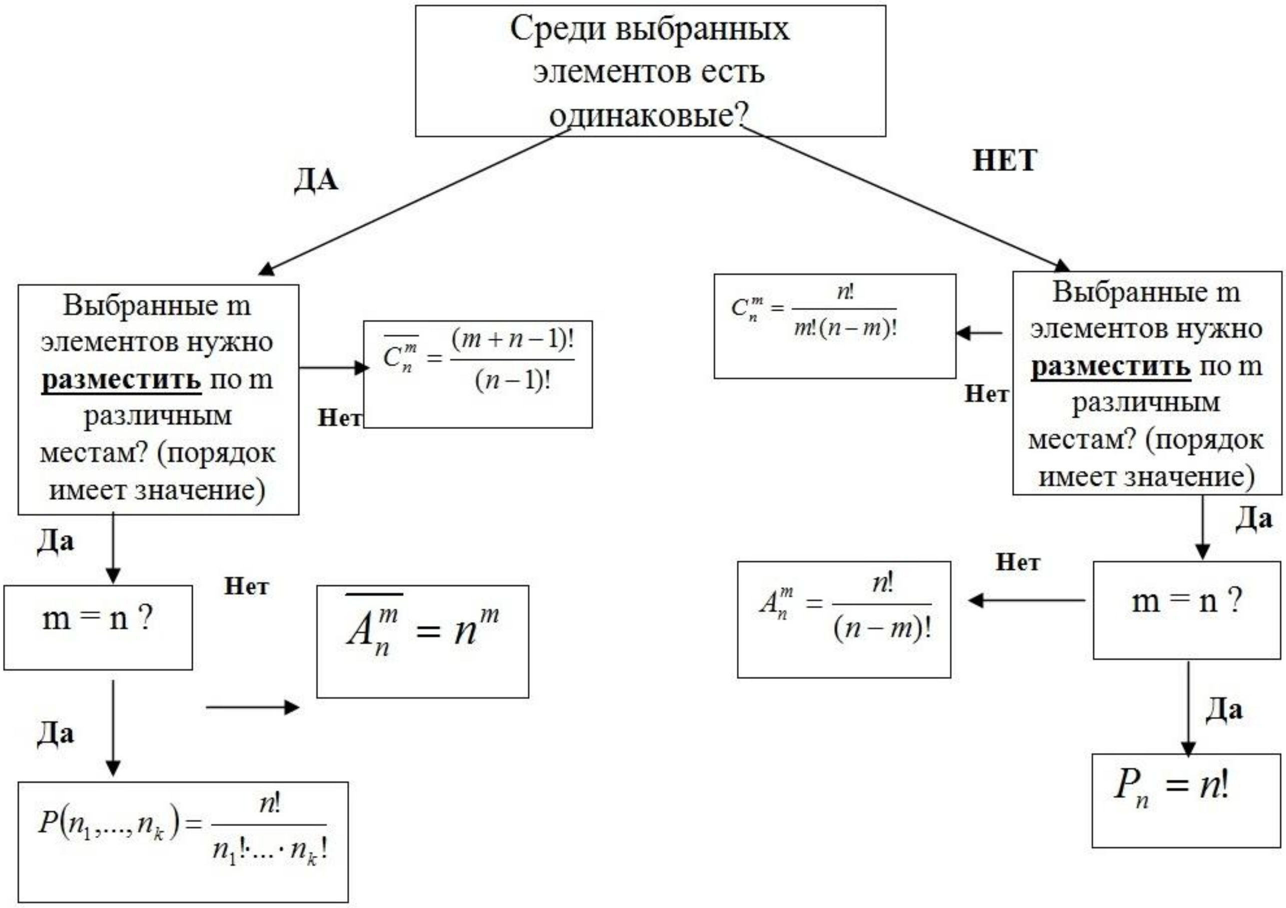
Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Решение

Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв. Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$$\overline{P}_9(1,4,3,1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520.$$

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО РАЗДЕЛУ «КОМБИНАТОРИКА»



ВСР: РГЗ «Решение комбинаторных уравнений»