ЛЕКЦИЯ № 1. *Вводная.* Значение математики в профессиональной деятельности

«Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле»
Крылов А. Н

План
1. Предмет и задачи математики.
2. Роль и место математики в современном мире
3. Связь математики с медициной

ВСР:
- сообщение: «Области применения математики в медицине»
- справочный материал (формулы)
- РГЗ «Проверь себя!»

Литература:
- Гилярова М.Г. -Математика для медицинских колледжей. – Изд. 4-е. – Ростов н/Д: Феникс, 2015. – 442 с. Стр. 17
- Лободюк, Е. В. Значимость математических знаний для медицинских работников / Е. В. Лободюк. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2020. — № 21 (311). — С. 19-21. — URL: https://moluch.ru/archive/311/70555 (дата обращения: 28.08.2022).

1. Предмет и задачи математики

Математика (греч. maqhmatica – mathematike, от maqhma – mathema – знание, учение, наука) – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Математика – самая древняя наука, игравшая важнейшую роль в жизни и деятельности человека на всех исторических этапах, т.к. людям всегда нужно было что-либо считать и чертить, измерять и вычислять, прогнозировать и проектировать, создавать новое.

Целью изучения математики является повышение общего кругозора, культуры мышления, формирование научного мировоззрения.

Чем больше человек познавал природу, создавал механизмы, развивал науку, производство и торговлю, тем весомее становился вклад математики. И это влияние было взаимным – математика стала сложной и разветвленной.

Сегодня можно говорить, что современная математика – это “*метанаука*”, объединяющая комплекс дисциплин: арифметику – теорию чисел, алгебру, геометрию, математический анализ, теорию множеств, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию игр и многие, многие другие (насчитывают несколько десятков крупных направлений). На стыках наук появляются разделы: математическая физика, математическая логика, математическая лингвистика, математическая экономика и др.

Математика – необходимый инструмент познания в любой отрасли человеческой деятельности – характеризуется высокой степенью абстрактности ее понятий и высокой степенью их обобщенности.

По меткому выражению известнейшего ученого Нильса Бора: “Математика – это больше, чем наука, это – язык”. То есть язык, на котором можно ставить вопросы и отвечать на них принципиально.

Математика – это также и форма мышления.

Математика – наука, которая скорее тождественна философии, чем остальным “содержательным наукам”; наука инструментальная; наука, которая вступает в глубокие органические связи с целым рядом других дисциплин.

Математика — наука о структурах, порядке и отношениях, которая исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания форм реальных объектов.

Математика – наука, которая появилась для удобства описания окружавших человека предметов их количества, их свойств и форм.

Математика есть универсальный язык науки и мощный метод научною исследования. История математики являет собой грандиозное свидетельство интеллектуального развития человечества за последние тысячелетия. Пьер Гассенди утверждает: «В случае если мы что-то знаем, то это благодаря изучению математики». По словам М. В. Ломоносова, «Математику уже -затем учить нужно, что она ум в порядок приводит».

Для уяснения роли и значимости математики в научном познании мира крайне важно понять, что такое математика. *Природа* математики (как и любой науки) определяется спецификой ее объекта и предмета изучения, основными методами исследования, а также выделением различных ее характерных черт.

Объектом математики как науки являются фундаментальные категории формы и количества, взятые в наиболее общем и чистом виде, и всевозможные их проявления.

Предметом математики служат разнообразные математические структуры и математические модели, которые появляются (открываются или изобретаются) в результате интеллектуальной деятельности человека как продукты рефлексии или отображение реальности. А общий **метод** математики есть строгая дедукция.

Задачи изучения математики:

-в результате освоения дисциплины обучающийся должен ***уметь:***

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

- в результате освоения дисциплины обучающийся должен ***знать:***

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Математическое образование – это испытанное столетиями средство интеллектуального развития в условиях массового обучения:

- воспитание интеллектуальной корректности, критичности мышления;
- формирование способности различать обоснованные и необоснованные суждения;
- приучает к продолжительной умственной деятельности.

Итак, математика есть наука о форме и количестве и четких схемах их бытия и воплощения. По этой причине математика универсальна как метод, аппарат исследования и получения научного знания и как точный язык его описания. Математика имеет многочисленные теоретические и практические приложения, адекватные действительности. Именно в рамках математики возник общенаучный дедуктивный метод, широко применяемый не только в естествознании и технике, но и в гуманитарных науках и обществоведении. В случае если естественные науки изучают природу, а гуманитарные и социальные науки - человека и человеческое общество, то математика исследует в ее же недрах полученные абстракции, то есть в известном смысле самое себя. В этом отношении математика близка к философии, научная составляющая которой отражена в постоянно развивающейся системе философских категорий.

2. Роль и место математики в современном мире

Современная научная картина мира зиждется на двух общих принципах (росс. математик и философ, академик И. Р. Шафаревич): принципе математизации знания и принципе гармонии, или эстетического отбора. **Принцип математизации** заключается, во-первых, в широком применении математических методов и теорий в других науках, технике и практике и, во-вторых, в построении наук, особенно естественных, по образу и подобию математики, дедуктивно. Наиболее ярко эта методология выражена в известном тезисе Галилея: «Измерить все, что измеримо, и сделать измеримым то, что таковым пока еще не является».

Математика занимает особое место среди других наук. Математику нельзя причислять к естествознанию (т.к. исключает наблюдение и эксперимент), хотя и зародилась она из практики как естественная наука.

Приложения математики весьма разнообразны. Принципиально область применения математических методов не ограничена: все виды движения материи могут изучаться математически. Однако роль и значение математических методов в различных случаях не одинаковы. Никакая математическая схема не исчерпывает всей конкретности действительных процессов.

Типичным примером полного господства математических методов можно считать небесную механику, в частности, учение о движении планет. Имеющий очень простое математическое выражение закон всемирного тяготения почти полностью определяет изучаемый здесь круг явлений. При переходе от механики к физике несколько возрастают трудности применения математического аппарата (выбор предпосылок использования математики и трактовка результатов).

В других естественных науках (например, биологических) математические методы играют более подчиненную роль. В еще большей степени математика предоставляет свои возможности непосредственному анализу явлений и процессов во всей их конкретной сложности в социальных и гуманитарных науках (часто математика остается лишь в форме подсобной науки – математической статистики). В окончательном же анализе социальных (и правовых) явлений и процессов математика вообще уходит на задний план, полностью уступая свое место качественному своеобразию каждого временного (исторического) промежутка.

Причина, по которой без математических методов сейчас не обходится не только техника, механика, электроника, экономика, но и медицина, экология, психология, социология, лингвистика, история, юриспруденция и др., проста – для математических методов характерны:

- *четкость формулировок и определений;*
- *использование точных количественных оценок;*
- *логическая строгость;*
- *сочетание индуктивного и дедуктивного подходов;*
- *универсальность.*

Использование математических методов формирует так называемый математический стиль мышления, т.е. абстрактный, логический, идеально строгий и – самое главное – нацеленный на поиск закономерностей. Профессионал, грамотно и аккуратно применяющий математические методы, способен принести пользу в любой сфере деятельности, в том числе и медицине.

Сегодня можно утверждать, что математика становится необходимым атрибутом любой науки. Вот основные причины этого: органическое единство природы и общества; содержательный понятийный аппарат (например, доказательство, множество, функция, модель, операция); правовые системы, явления и процессы наряду с качественными свойствами обладают и количественной мерой; в некоторых областях права (криминалистика, криминология, государственное управление и др.) просто не обойтись без количественных параметров.

Математическое образование должно составлять неотъемлемую часть культурного багажа любого современного человека. Но оно не должно никоим образом сводиться к рецептурам (будь то таблица умножения или расчет астрометрических индексов)

Основной целью математического образования должно быть воспитание умения исследовать явления реального мира. Способность составлять и исследовать математическоие модели является важнейшей составной частью этого умения.

Начало периода элементарной математики относят к VI-Vвв. до н.э. К этому времени был накоплен достаточно большой фактический материал. Понимание математики как самостоятельной науки впервые возникло в Древней Греции. В течение этого периода математические исследования имеют дело лишь с достаточно ограниченным запасом основных понятий, возникших с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Развивается арифметика - наука о простейших свойствах чисел.

В период развития элементарной математики появляется теория чисел, постепенно выросшая из арифметики. Создается алгебра как буквенное исчисление. Обобщается труд большого числа математиков, занимающихся решением геометрических задач, а стройную и строгую систему элементарной геометрии – геометрию Евклида (300 лет до н.э.), изложенную в его знаменитом труде «Начала», включающем 15 книг.

В XVII веке запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создание дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин.

Великим открытиям XVII века является введенная И. Ньютоном (1643-1727) и Г. Лейбницем 91646-1716) понятие бесконечно малой величины, создание основ анализа бесконечно малых (математического анализа).

На первый план выдвигается понятие функции. Функция становится основным предметом изучения. Изучение функции приводит к основным понятиям математического анализа: пределу, производной, дифференциалу, интегралу.

К этому времени относится и появление гениальной идеи Р. Декарта (1596-1650) о методе координат. С одной стороны, создается аналитическая геометрия, которая позволяет изучить геометриче кие объекты методами алгебры и анализа. С другой стороны, метод координат открыл возможность геометрической интерпритации алгебраических и аналитичнских фактов.

Дальнейшее развитие математики в начале XIXв. привело к постановке задачи изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм с достаточно общей точки зрения.

Связь математики и естествознания приобретает все более сложные формы. Возникают новые теории. Новые теории возникают не только в результате запросов естествознания и техники, но и в результате внутренней потребности математики. Замечательным примером такой теории является «воображаемая геометрия» Н. И. Лобачевского.

Развитие математики в XIX и XX веках позволяет отнести ее к периоду современной математики. Развитие самой математики, «математизация» различных областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению новых математических дисциплин, например, исследование операций, теория игр, математическая экономика и другие.

В основе построения математической теории лежит аксиоматический метод.

В основу научной теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные положения теории получаются, как логические следствия аксиом.

Основными методами в математических исследованиях являются математические доказательства – строгие логические рассуждения.

Математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, для оценки выбора способа ее решения необходима математическая интуиция.

В математике изучаются математические модели объектов. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга реальных явлений. Так, одно и тоже дифференциальное уравнение может описывать процессы роста населения и распад радиоактивного вещества. Для математика важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.

В математике используют два вида умозаключений: дедукция и индукция.

Индукция – метод исследования, в котором общий вывод строится не основе частных посылок.

Дедукция – способ рассуждения, посредством которого от общих посылок следует заключение частного характера.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Причина проникновения математики в различные отрасли знаний заключается в том, что она предлагает весьма четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками.

Особенно тесно математика связана с все более нарастающим общим прогрессом и развитием информационных технологий, компьютеризации.

Что касается медицины, то с наступлением новых технологий и точных расчетов эффективность лечения будет равняться практически 100%. Все больше новые методы лечения, новые лекарства, медицинские эксперименты моделируются и разрабатываются с помощью той же математики и компьютерных технологий

Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

3. Связь математики с медициной

Медицина начала свое существование еще в древности, о чем говорят древние рисунки, найденные археологами, а также произведения древнегреческих и древнеримских мыслителей, в которых содержится много информации о «врачевании».

Гиппократ, сыграл важнейшую роль в становлении медицинской науки, современная практическая медицина основывается на его трудах.

Само слово ***«медицина»*** происходить от латинского ***«medicina»*** — что означает исцеление.

Медицина, согласно Большой российской энциклопедии, (лат. medicina, от medicus — врач) — область профессиональной практической и научной деятельности, имеющая своей целью распознавание, лечение и предупреждение болезней, сохранение и укрепление здоровья и трудоспособности, продление жизни людей.

Направленная на укрепление здоровья, изучение и лечение различных патологических состояний человека, медицина играет весомую роль в интеграции совокупности наук о человеке.

Медицина концентрирует в себе достижения биологии и химии, психологии и педагогики, информатики, философии, математики и физики.

В современном мире, когда основой образования является ценностная парадигма, когда здоровье человека зависит от его творческих способностей, душевного равновесия, нравственных качеств и еще целого ряда причин, медицина, как никогда, становится близка с фундаментальными науками.

Математика и медицина связаны прочной незримой нитью между собой. Но несведущим в этих областях людям кажется, что эти науки несовместимы.

Конечно, при постановке диагноза врач напрямую не использует математику, но даже при сборе анамнестических данных, например, проверить пульс и сравнить его с нормой для данного пациента, нужны математические знания, так как пульс является квадратным корнем из роста пациента. А если говорить о назначениях врача и манипуляциях, которые выполняет медицинская сестра, то здесь связь проявляется, например, в расчете суточной дозировки препарата, или в расчете концентрации препарата при его разведении. Ведь если неверно выполнить расчет дозировки, то пациент может получить осложнения, анафилактический шок, или еще хуже, умереть. Это далеко не все области применения математики в медицине, их спектр гораздо больше.

Знания основ математики применяются врачами для описания процессов, происходящих в организме человека. Это необходимо, так как позволяет различать болезненный организм от здорового по сделанным снимкам и экранам монитора.

Большое место в современной медицине занимает *математическая статистика.*

Статистика (от латинского status — состояние дел) - изучение количественной стороны массовых общественных явлений в числовой форме.

Вначале статистика применялась в основном в области социально-экономических наук и демографии, а это неизбежно заставляло исследователей более глубоко заниматься вопросами медицины.

Адольф Кетле – основатель теории статистики.

А.Кетле обнаружил:

- между числом пульса и ростом есть взаимосвязь;
- возраст оказывает влияние на изменение величины роста;
- частота ударов сердца располагается в обратном отношении с квадратным корнем роста;
    - *например, если у человека рост 1,68 м, то частота ударов сердца будет равняться 70*;
- таким образом, это позволяет определить пульс у человека любого роста.

Роль статистических наблюдений довольна важна: их можно использовать, где и как угодно. Например, по новостям часто можно услышать такие фразы *«согласно статистике, число заболеваемости возросло на 30%»*, — эти выводы делаются на основе математики.

Математика играет одну из главных ролей при создании и применении лекарств. Лечебный эффект лекарства зависит не только от вида составляющих, но и от пропорций, в которых они входят в него. Фармацевт должен уметь решать задачи на пропорцию и концентрацию растворов. На упаковке лекарства мы можем прочитать состав и количественные показатели ингредиентов, активных веществ, указания о норме и времени приема лекарства – и это тоже математика.

Уже опираясь на вышесказанное, можно сказать о том, что связь математики с медициной есть, и роль и влияние математики на профессиональную деятельность медицинских работников очень велика. Поэтому качественное преподавание математики в организациях, осуществляющих образовательную деятельность на всех уровнях образования — это основная задача. Конечно, для медицинских образовательных организаций профилирующими являются медицинские и клинические дисциплины, которые формируют основу профессиональной компетентности медицинского работника. Общеобразовательные дисциплины уходят на второй план, однако знания математики тоже способствуют развитию необходимых и значимых для медицинской профессии качеств у обучающихся.

Математические методы (моделирование, анализ, прогнозирование и т. д.) в медицине применяют:

- для разработки и диагностики систем жизнеобеспечения;
- для описания биологических процессов, начиная от молекул, заканчивая целым организмом и его органами и тканями;
- при выборе способа лечения заболевания;
- для описания динамики изучаемых явлений; для обработки статистических данных;
- для моделирования химических, биологических и физических процессов;
- при изучении циклических процессов, происходящих в организме человека; при расчете дозы лекарственных средств в различных формах;
- при расчете процентной концентрации растворов;
- при расчете прибавки роста и массы тела у детей;
- при расчете индекса массы тела и много другого.

Такие области медицины, как генетика, таксономия, теория эпидемии, даже организация медицинской службы, так же сложно представить без знаний математики.

Значимость математики для медицинских профессий очевидна:

- современный мир входит в эпоху математизации, в том числе и системы здравоохранения, вводятся новейшие методики и технологии, которые базируются на достижениях математики в области медицины.

Подводя итог вышесказанного, можно сказать, что математическая компетентность будущего медицинского работника складывается не столько из математической подготовки, а сколько из математических знаний, которые он будет использовать в профессиональной деятельности при решении задач

4. Проверь себя!

РГЗ

Задание 1.

В контрольном тесте 30 вопросов. Для получения оценки «5» можно сделать не более 10% ошибок.

Сколько ошибок можно допустить?

Ответ: ______

Задание 2.

В травматологический пункт в течении месяца ежедневно обращались следующее число больных:

9;11;7;12;15;18;21;16;23;20;16;25;22;21;17;26;19;16;18;21;20;12;17;16;18;15;15;17;19;24.

Определите среднее число больных в течении дня (средняя нагрузка)

Ответ: ______

Задание 3.

Согласно формуле Лоренца, идеальная масса тела (**М**) составляет:

М = Р — (100 — [(Р — 150) / 4]), где **Р** — рост человека.

А) Определите идеальную массу женщины ростом 167 см.

Б) Каким может быть рост мужчины, если его идеальная масса 82 кг.

В) Определите свою идеальную массу

Ответ: А)______ Б)__________ В)_________

Задание 4.

Показатель крепости телосложения (по Пинье) выражает разницу между ростом стоя и суммой массы тела и окружностью грудной клетки:

Х = Р — (В+О),

где Х — индекс, Р — рост (см), В — масса тела (кг), О — окружность груди в фазе выдоха (см).

Критерии оценки:

- разность *меньше 10* оценивается как крепкое телосложение,
- *от 10 до 20* — хорошее,
- *от 21 до 25* — среднее,
- *от 25 до* 35 — слабое,
- *более 36* — очень слабое.

А) Оцените телосложение мужчины ростом 185 см, весом 80 кг с окружностью грудной клетки 97 см.

Б) Оцените свое телосложение по Пинье.

Ответ: А)_________ Б)_______________

Задание5.

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы вы получили 9570 рублей. Сколько рублей составляет ваша заработная плата?

Ответ: _________

Задание 6.

Капсулы, заполненные смесью витаминов, используют как биологически активную добавку (БАД). Оболочка каждой капсулы имеет форму полого цилиндра, на концах которого расположены две полусферы. Причем длина капсулы 21 мм, а длина её цилиндрической части 13 мм. Сколько миллилитров смеси помещается в одной капсуле, если 1 мл = 1 см^3.

Ответ: _________

Приложение

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Базовый уровень

Справочные материалы

Алгебра

Таблица квадратов целых чисел от 0 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства арифметического квадратного корня

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ при $a\ge 0,\ b\ge 0$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a\ge 0,\ b>0$

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\ne 0$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ при $b^2-4ac>0$

$x=-\frac{b}{2a}$ при $b^2-4ac=0$

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Степень и логарифм

Свойства степени при $a>0,\ b>0$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$\left(a^n\right)^m=a^{nm}$

$(ab)^n=a^n\cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Свойства логарифма при $a>0,\ a\ne 1,\ b>0,\ x>0,\ y>0$

$a^{\log_a b}=b$

$\log_a a=1$

$\log_a 1=0$

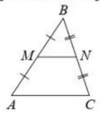
$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

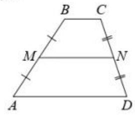
$\log_a b^k=k\log_a b$

Геометрия

Средняя линия треугольника и трапеции

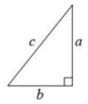


MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$
$MN=\frac{AC}{2}$



$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$
$MN=\frac{BC+AD}{2}$

Теорема Пифагора



$a^2+b^2=c^2$

Длина окружности $C=2\pi r$

Площадь круга $S=\pi r^2$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника

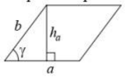
$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

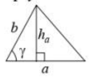
Площади фигур

Параллелограмм



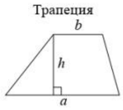
$S=ah_a$
$S=ab\sin\gamma$

Треугольник



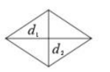
$S=\frac{1}{2}ah_a$
$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$

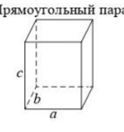
Ромб



$d_1,\ d_2$ – диагонали
$S=\frac{1}{2}d_1d_2$

Площади поверхностей и объёмы тел

Прямоугольный параллелепипед



$V=abc$

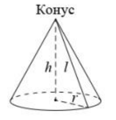
Прямая призма

$V=S_{\text{ïñí}}h$

Пирамида

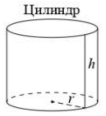
$V=\frac{1}{3}S_{\text{ïñí}}h$

Конус



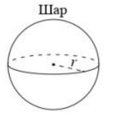
$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
$S_{\text{áîê}}=\pi rl$

Цилиндр



$V=\pi r^2h$
$S_{\text{áîê}}=2\pi rh$

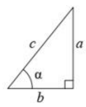
Шар



$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
$S=4\pi r^2$

Тригонометрические функции

Прямоугольный треугольник

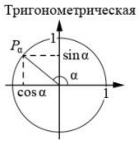


$\sin\alpha=\frac{a}{c}$

$\cos\alpha=\frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$

Тригонометрическая окружность



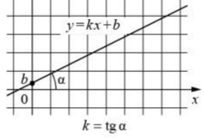
Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Некоторые значения тригонометрических функций

α	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

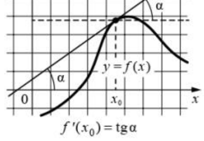
Функции

Линейная функция



$k=\operatorname{tg}\alpha$

Геометрический смысл производной



$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$

АЛГЕБРА

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

СТЕПЕНИ И КОРНИ

Степень с целым показателем

$a^n=a\cdot a...a$ (n раз, $n\in\mathbf{N}$, $n\neq1$),

$a^1=a$, $a^0=1$ $(a\neq0)$, $a^{-n}=1/a^n$ $(a\neq0)$

Свойства: $a^ma^n=a^{m+n}$, $a^m/a^n=a^{m-n}$,

$(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$, $(a/b)^n=a^n/b^n$

$\sqrt[n]{a}$ - арифметический корень степени n

из числа a, $a\geq0$, $\sqrt[n]{a}\geq0$, $n\in\mathbf{N}$, $n>1$

Свойства: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$,

$\sqrt[n]{a/b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$, $\left(\sqrt[n]{a/b}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}/\sqrt[n]{b^m}$

$\sqrt{a}$ - арифметический квадратный корень

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $\sqrt{a^2}=|a|$

Степень с дробным (рациональным) показателем

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, $n>2$, $a>0$

Свойства степени с действительным показателем:

$a^xa^y=a^{x+y}$, $(a^x)^y=a^{xy}$, $(ab)^x=a^xb^x$,

$(a/b)^x=a^x/b^x$ $(a>0, b>0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R})$

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом числа b по данному основанию a называется показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b

$\log_a b=x$ $(a>0, a\neq1, b>0)$ – логарифм числа b по основанию a $(a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b)$

Основное тождество: $a^{\log_a b}=b$

lg*b* - десятичный log (log по основанию **10**): $10^{\lg b}=b$,

ln*b* - натуральный log (log по основанию **e**): $e^{\ln b}=b$,

$e=\lim_{m\to\infty}(1+1/m)^m\approx2{,}71828182...$, $\frac{\lg b}{\ln b}\approx0{,}4343...$

Свойства логарифмов

$(a>0, a\neq1, b>0, c>0, n\neq0)$

$x=\log_a a^x$; $x=a^{\log_a x}$

$a^x=b^{x\log_b a}=e^{x\ln a}=10^{x\lg a}$

$\log_a a=1$; $\log_a 1=0$

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq1)$ (переход от одного основания к другому)

$\log_a(b\cdot c)=\log_a|b|+\log_a|c|$ $(bc>0)$

$\log_a\frac{b}{c}=\log_a|b|-\log_a|c|$ $(bc>0)$

$\log_a\frac{1}{b}=\log_a b^{-1}=-\log_a b=\log_{a^{-1}}b=\log_{\frac{1}{a}}b$

$\log_{(a^n)}b^m=\frac{m}{n}\log_a b$; $\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$

$b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

- числовая последовательность (a_n), определяемая условиями:

1) $a_1=a$; 2) $a_{n+1}=a_n+d$, $n=1, 2, ...$

(d – разность арифметической прогрессии)

Свойства арифметической прогрессии:

$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$; $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

Формула n-го члена: $a_n=a_1+d(n-1)$

Формулы суммы n первых членов:

$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$; $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

- числовая последовательность (b_n), определяемая условиями:

1) $b_1=b$ $(b\neq0)$; 2) $b_{n+1}=b_nq$ $(q\neq0)$, $n=1, 2, ...$

(q – знаменатель геометрической прогрессии)

Свойства геометрической прогрессии:

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$; $b_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+2}$

Формула n-го члена: $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

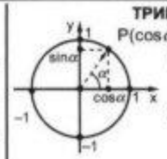
Формулы суммы n первых членов $(q\neq1)$:

$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$; $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$S=b_1+b_1q+b_1q^2+...=\frac{b_1}{1-q}$, $|q|<1$

ТРИГОНОМЕТРИЯ



Косинусом числа α называется абсцисса точки P единичной окружности ($\cos\alpha=x_P$)

Синусом числа α называется ордината точки P единичной окружности ($\sin\alpha=y_P$)

Тангенс: $\text{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{n}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

Котангенс: $\text{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

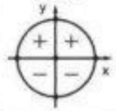
Основные тригонометрические тождества

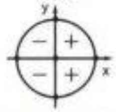
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$; $\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\alpha=1$;

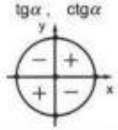
$1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\text{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Знаки тригонометрических функций

sin α cos α tg α, ctg α







Формулы приведения

β	$\mp\alpha$	$\frac{\pi}{2}\mp\alpha$	$\pi\mp\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\mp\alpha$	$2\pi\mp\alpha$
$\sin\beta$	$\mp\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\text{tg}\,\beta$	$\mp\text{tg}\,\alpha$	$\pm\text{ctg}\,\alpha$	$\mp\text{tg}\,\alpha$	$\pm\text{ctg}\,\alpha$	$\mp\text{tg}\,\alpha$
$\text{ctg}\,\beta$	$\mp\text{ctg}\,\alpha$	$\pm\text{tg}\,\alpha$	$\mp\text{ctg}\,\alpha$	$\pm\text{tg}\,\alpha$	$\mp\text{ctg}\,\alpha$

Некоторые значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\text{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

$\sin18°=\sin(\pi/10)=(\sqrt{5}-1)/4$

Формулы сложения

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\text{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\text{tg}\,\alpha\pm\text{tg}\,\beta}{1\mp\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta}$

$\text{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\text{ctg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\beta\mp1}{\text{ctg}\,\beta\pm\text{ctg}\,\alpha}$

Преобразование суммы тригонометрических функций

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\text{tg}\,\alpha\pm\text{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\text{ctg}\,\alpha\pm\text{ctg}\,\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

$\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta=\frac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{\text{ctg}\,\alpha+\text{ctg}\,\beta}$

Введение вспомогательного угла

$A\sin x\pm B\cos x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x\pm\varphi)$, φ – угол,

$\cos\varphi=A/\sqrt{A^2+B^2}$, $\sin\varphi=B/\sqrt{A^2+B^2}$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

$\text{tg}\,2\alpha=\frac{2\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$; $\text{ctg}\,2\alpha=\frac{\text{ctg}^2\alpha-1}{2\text{ctg}\,\alpha}$;

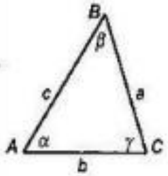
$\text{tg}\,3\alpha=\frac{3\text{tg}\,\alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}$; $\text{ctg}\,3\alpha=\frac{\text{ctg}^3\alpha-3\text{ctg}\,\alpha}{3\text{ctg}^2\alpha-1}$

ИЗДАТЕЛЬСТВО «Подарок», 105275, г. Москва, ул. Почтовая, д.17. E-mail: podarok-pak04@mail.ru ISBN 978-5-9919-01219-5

МАТЕМАТИКА
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

РИЕНТАМ И СТУДЕНТАМ ДЛЯ УСПЕШНОЙ ПОДГОТОВКИ И СДАЧИ ЕГЭ, ЭКЗАМЕНОВ, ТЕСТОВ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ТРЕУГОЛЬНИК



Сумма внутренних углов : $\alpha+\beta+\gamma=\pi=180^\circ$

Теорема косинусов:

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,$

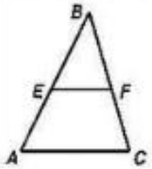
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$

Величина внешнего угла : $\alpha_1=\beta+\gamma,\ \beta_1=\alpha+\gamma,\ \gamma_1=\alpha+\beta$

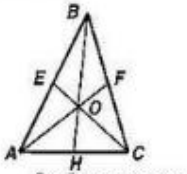
Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$,

(R - радиус описанной окружности).



Свойства средней линии:

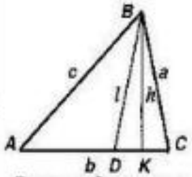
$[EF]\parallel[AC]$, $EF=\dfrac{1}{2}AC$



Свойства медиан:

$OF=\dfrac{1}{3}AF,\ OE=\dfrac{1}{3}CE,$

$OH=\dfrac{1}{3}BH.$



Свойства биссектрис : $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}.$

Свойства высот : $h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}.$

Длина медианы, высоты и биссектрисы : проведенных из вершины B:

$m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$,

$h_b=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$, $l_b=\dfrac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$

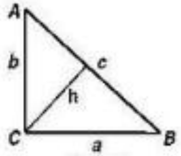
Площадь : $S=\dfrac{1}{2}ah_a$ $\quad S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$.

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *(формула Герона)*.

Периметр : $2p=a+b+c$ (p – полупериметр)

$S=\dfrac{abc}{4R}$, $S=pr$, r - радиус вписанной окружности

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Теорема Пифагора: $a^2+b^2=c^2$

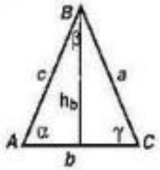
(a,b – длины катетов, c - длина гипотенузы).

$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=$

$=b\,\mathrm{tg}\,\alpha=b\,\mathrm{ctg}\,\beta$

$m_c=\dfrac{c}{2}, R=\dfrac{c}{2},\quad r=\dfrac{a+b+c}{2},\quad S=\dfrac{ab}{2}=\dfrac{ch_c}{2}.$

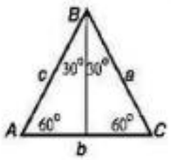
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$m_b=h_b=l_b=\sqrt{a^2-b^2/4}$,

$\alpha=\dfrac{\pi-\beta}{2},\ S=\dfrac{bh_b}{2}=\dfrac{a^2\sin\beta}{2}.$

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



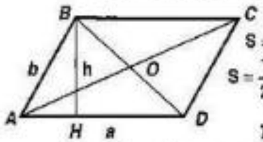
$M=H=L=a\sqrt{3}/2,$

$R=a\sqrt{3}/3,\ r=a\sqrt{3}/6$, R

$S=a^2\sqrt{3}/4.$

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Свойства сторон и углов: $\angle BAD+\angle ADC=\pi$, $AB\parallel CD$, $AB=CD$, $AD\parallel BC$, $AD=BC$, $\angle BAD=\angle BCD$, $\angle ABC=\angle ADC$, *Свойства диагоналей:* $AO=OC$, $BO=OD$, $AC^2+BD^2=2(a^2+b^2)$.

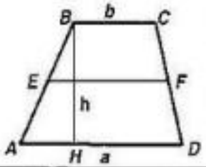


Площадь:

$S=ah,\ S=ab\sin\alpha,$

$S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\sin\angle AOB$

ТРАПЕЦИЯ

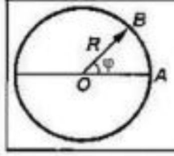


Свойства сторон : $AD\parallel BC$,

Средняя линия : $EF\parallel AD$, $EF=(a+b)/2$.

Площадь : $S=(a+b)h/2$, $S=EF\cdot h$.

ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ



Длина окружности, $l=2\pi R$;

Площадь, $S=\pi R^2$,

Длина дуги $l_{AB}=2\pi R\cdot\varphi/360$,

Площадь, $S_{OAB}=\pi R^2\cdot\varphi/360$.

ПРИЗМА

Призма – многогранник, две грани которого параллельны, а остальные пересекаются по параллельным прямым. ∥ грани – основания призмы, остальные грани – боковые. Боковые грани – параллелограммы.

Параллелепипед – призма, основаниями которой являются параллелограммы.

Площадь поверхности:

$S=2S_{осн}+S_{бок}$,

где $S_{осн}$ – площадь основания призмы;

$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности призмы;

$S_{бок}=P\cdot l$;

P – периметр перпендикулярного сечения;

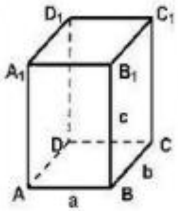
l – длина бокового ребра.

Объем: $V=QH$, $V=Q_1l$, где

Q – площадь основания; H – высота призмы,

Q_1 – площадь перпендикулярного сечения

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



Свойства диагоналей:

$AC_1=BD_1=CA_1=DB_1=d$,

$d^2=a^2+b^2+c^2$.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

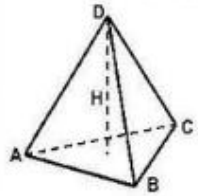
$S_{бок}=2(ab+bc+ac)$

Объем: $V=abc$

Для куба: $a=b=c$,

$d=a\sqrt{3}$, $S=6a^2$, $V=a^3$

ПИРАМИДА



Площадь поверхности:

$S_{пир}=S_{бок}+S_{осн}$, где

$S_{бок}$ – пл. бок. поверхн.;

$S_{осн}$ – пл. основания.

Объем: $V=\dfrac{1}{3}QH$, где

Q – пл. основания;

H – высота пирамиды.

Правильная пирамида $S_{бок}=\dfrac{1}{2}Ph_{бок}$, где

P – периметр основания; h – высота боковой грани

$Q=S_{бок}\cos\alpha$, где α – угол между боковой гранью и плоскостью основания.

Усеченная пирамида

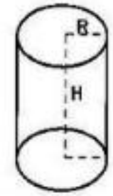
Объем: $V=\dfrac{h}{3}\left(Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2\right)$, где

h – высота; Q_1, Q_2 – площади оснований.

Для правильной усеченной пирамиды

$S_{бок}=\dfrac{1}{2}(p_1+p_2)h_{бок}$, где p_1, p_2 – периметры оснований; $h_{бок}$ – высота боковой грани.

ЦИЛИНДР



Площадь боковой поверхности:

$S_{бок}=2\pi RH$

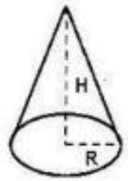
Площадь полной поверхности:

$S_{цил}=2\pi RH+2\pi R^2$;

Объем:

$V=\pi R^2H$;

КОНУС



Площадь боковой поверхности:

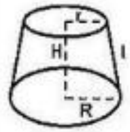
$S_{бок}=\pi Rl$

Площадь полной поверхности:

$S_{кон}=\pi RL+\pi R^2$

Объем: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2H$

Усеченный конус



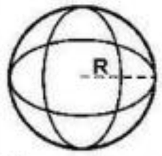
$S_{бок}=\pi(R+r)l$,

$S_{кон}=\pi R^2+\pi r^2+\pi(R+r)l$

$V=\dfrac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$.

ШАР

Шаровая поверхность или сфера – геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки – центра сферы.



Шар – тело, ограниченное сферой.

Площадь поверхности:

$S=4\pi R^2$

Объем: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

Площадь сферического сегмента:

$S=2\pi RH$, где H – высота сегмента.

Объем шарового сегмента: $V=\dfrac{1}{3}\pi H^2(3R-H)$

Объем шарового сектора: $V=\dfrac{2}{3}\pi R^2H$

Сечение сферы любой плоскостью – окружность.

Сечение шара любой плоскостью – круг.

Большой круг шара – круг проходящий через центр.

Малый круг шара – круг, образованный сечением шара плоскостью, не проходящей через центр.

Фоксфорд